Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA-1112)
Abril-Julio 2008

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

2^{do} Examen Parcial (30 %)
Duración: 1h 50min
Tipo C

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. (6 puntos) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje Y la región comprendida entre las gráficas $y = |x+2|$, $y = 4 - |x+2|$.

Pregunta 2. (6 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt[7]{(x^2-1)^5(x-2)^2}}{(x^3+9)^{\frac{1}{5}}} \text{ para } x > 2.$$

Mediante derivación logaritmica encuentre $f'(x)$.

Pregunta 3. Calcule las siguientes integrales

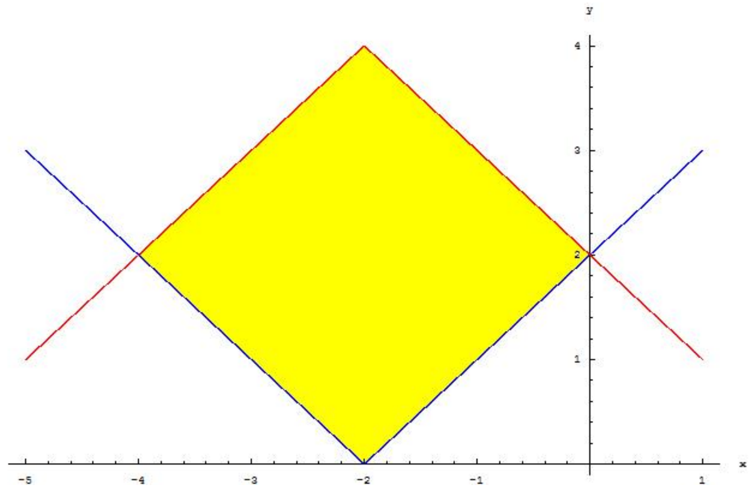
a) (6 puntos) $\displaystyle\int_1^e \frac{6\ln\left(\sqrt[3]{4x}\right)}{x}dx$

b) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+1}dx$

c) (6 puntos) $\displaystyle\int e^{x+e^x}dx$

Soluciones

1) La región a rotar se indica a continuación



Tenemos que

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

y entonces

$$4 - |x+2| = \begin{cases} 4-x-2 = 2-x & x \geq -2 \\ 4+x+2 = 6+x & x < -2 \end{cases}$$

Ahora buscamos las coordenadas x de intersección de las dos curvas. Si $x \geq -2$, entonces

$$x+2 = 2-x \Leftrightarrow x = 0.$$

Si $x < 2$, entonces

$$-x-2 = 6+x \Leftrightarrow x = -4.$$

Entonces $x = 0$ y $x = -4$. Si usamos cascarones la integral que da el volumen es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-4}^{-2} (-x)((6+x)-(-x-2))dx + 2\pi \int_{-2}^{0} (-x)((2-x)-(x+2))dx \\ &= 2\pi \int_{-4}^{-2} (-x)(8+x)dx + 2\pi \int_{-2}^{0} (-x)(-2x)dx \\ &= -2\pi \int_{-4}^{-2} (8x+2x^2)dx + 2\pi \int_{-2}^{0} 2x^2 dx \\ &= -4\pi \int_{-4}^{-2} (4x+x^2)dx + 4\pi \int_{-2}^{0} x^2 dx \\ &= -4\pi \left[2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{-2} + 4\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{0} \\ &= -4\pi \left(8 - \frac{8}{3} - 32 + \frac{64}{3} \right) + 4\pi \frac{8}{3} = 32\pi \end{aligned}$$

El volumen escrito usando el método de las arandelas es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 ((y+2)^2 - (2-y)^2)dy + \pi \int_2^4 ((6-y)^2 - (y-2)^2)dy \\ &= \pi \int_0^2 8ydy + \pi \int_2^4 (32-8y)dy \\ &= 16\pi + 16\pi = 32\pi \end{aligned}$$

2) Como $x > 2$ observamos que $(x^2-1) > 0$, $x-2 > 0$ y $x^3+9 > 0$, quedando justificadas todas las manipulaciones que vamos a hacer usando las propiedades de la función logaritmo natural.

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \sqrt[7]{(x^2-1)^5(x-2)^2} - \ln(x^3+9)^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{7}\ln\left((x^2-1)^5(x-2)^2\right) - \frac{1}{5}\ln(x^3+9) \\ &= \frac{1}{7}\ln(x^2-1)^5 + \frac{1}{7}\ln(x-2)^2 - \frac{1}{5}\ln(x^3+9) \\ &= \frac{5}{7}\ln(x^2-1) + \frac{2}{7}\ln(x-2) - \frac{1}{5}\ln(x^3+9) \end{aligned}$$

Derivamos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{7}\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{7}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\frac{3x^2}{x^3+9}$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{\sqrt[7]{(x^2-1)^5(x-2)^2}}{(x^3+9)^{\frac{1}{5}}}\left(\frac{10x}{7(x^2-1)} + \frac{2}{7(x-2)} - \frac{3x^2}{5(x^3+9)}\right)$$

3) a) Sea $I = \int_1^e \frac{6\ln\left(\sqrt[3]{4x}\right)}{x}dx$. Como $\sqrt[3]{4x} = (4x)^{\frac{1}{3}}$ y por propiedades de la función logaritmo natural

$$I = \int_1^e \frac{6}{3}\frac{\ln(4x)}{x}dx = 2\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}dx.$$

Usamos la sustitución $u = \ln(4x)$, $du = \frac{4dx}{4x} = \frac{dx}{x}$

$$I = 2\int_{\ln(4)}^{\ln(4e)} udu = u^2\Big|_{\ln(4)}^{\ln(4e)} = \ln^2(4e) - \ln^2(4).$$

Si se quiere se puede reescribir la respuesta anterior

$$\begin{aligned} \ln^2(4e) - \ln^2(4) &= (\ln(4) + \ln(e))^2 - \ln^2(4) = (\ln(4)+1)^2 - \ln^2(4) \\ &= \ln^2(4) + 2\ln(4) + 1 - \ln^2(4) = 2\ln(4) + 1. \end{aligned}$$

Alternativamente la integral $I = 2\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}dx$, se ha podido reescribir como

$$I = 2\int_1^e \frac{\ln(4) + \ln(x)}{x}dx$$

y en ese caso se podía usar la sustitución v=ln(4) + ln(x) o se podía dividir la integral en dos integrales

$$I = 2\int_1^e \frac{\ln(4)}{x}dx + 2\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$$

y resolver cada integral por separado.

b) Sea $\int \frac{2x-5}{x^2+1}dx$. Tenemos que

$$I = \int \frac{2x}{x^2+1}dx - 5\int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

En la primera integral usamos la sustitución $u = x^2+1$, $du = 2xdx$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} - 5\int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|u| - 5\arctan(x) + C \\ &= \ln|x^2+1| - 5\arctan(x) + C = \ln(x^2+1) - 5\arctan(x) + C. \end{aligned}$$

c) Sea $I = \int e^{x+e^x}dx$. Entonces

$$I = \int e^x e^{e^x} dx$$

lo cual sugiere la sustitución $u = e^x$, $du = e^x dx$,

$$I = \int e^u du = e^u + C = e^{e^x} + C$$